جبر 2 (عملي)

المحاضرة الرابعة (عملي)

تمرين: ① أوجد كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأصغري للمصفوفة

② تحقق من مبرهنة كيلي هاملتون

③ أوجد A^{-1} بطريقة كيلي هاملتون

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

① حسب التعريف نجد

$$cl_{(x)A} = |xE - A|$$

$$= \left| x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2}(x-2)\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

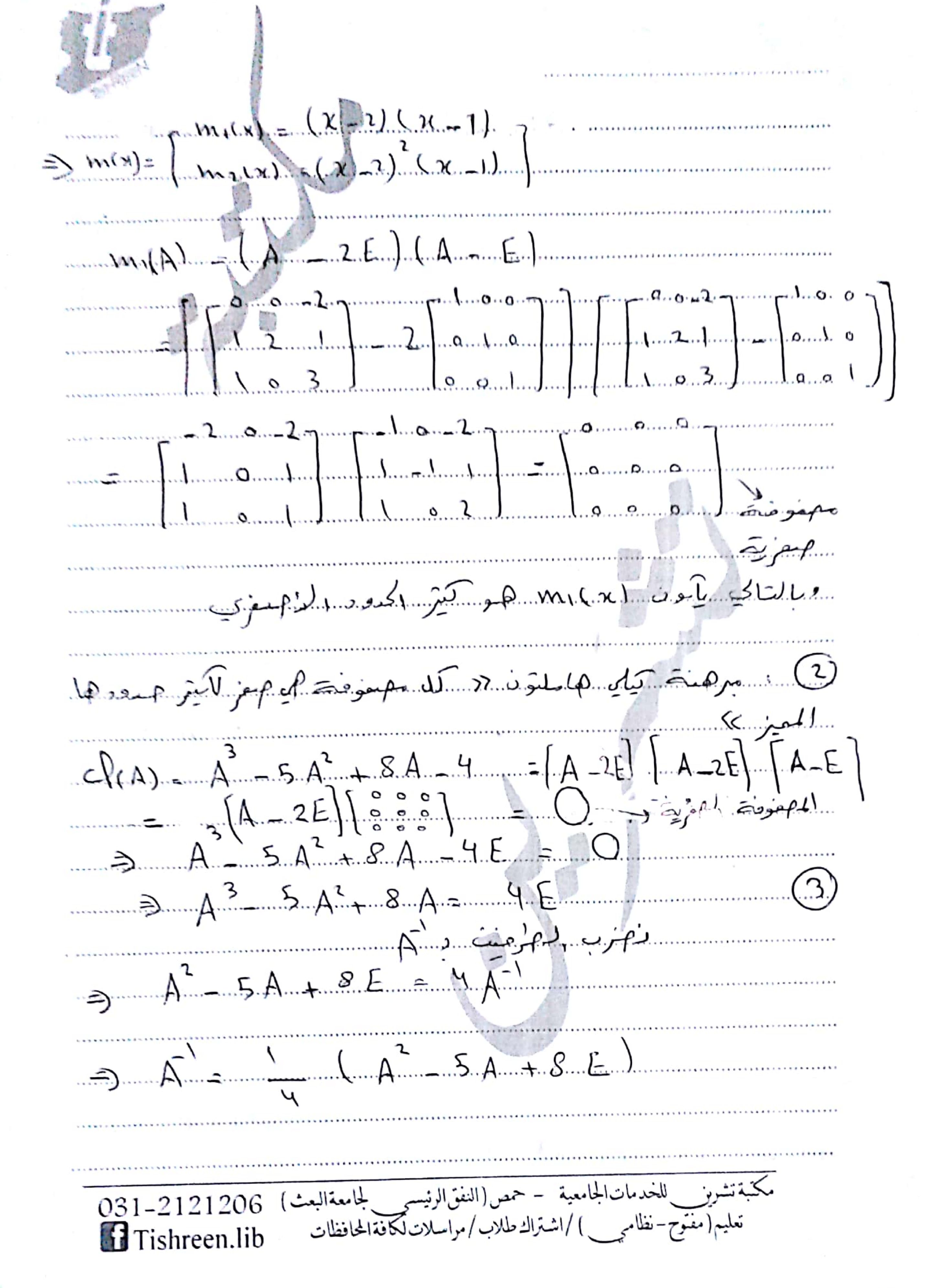
$$= (x-2)((x-3)(x)+2) = (x-2)(x^2-3x+2)$$

$$= x^3-3x^2+2x-2x^2+6x-4$$

$$cl_{(x)A} = x^3-5x^2+8x-4$$

نلاحظ أن

$$cl_{(x)A} = (x-2)(x-2)(x-1)$$



$$\Rightarrow m(x) = \begin{cases} m_1(x) = (x-2)(x-1) \\ m_2(x) = (x-2)^2(x-1) \end{cases}$$

$$m_1(A) = (A - 2E)(A - E)$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ← مصفوفة صفرية

وبالتالي يكون $m_1(x)$ هو كثير الحدود الأصغري

(2) : مبرهنة كيلي هاملتون « كل مصفوفة هي جذر لكثير حدودها المميز »

$$cp(A) = A^3 - 5A^2 + 8A - 4 = [A-2E][A-2E][A-E]$$

$$= [A-2E]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$ ← المصفوفة الصفرية

$$\Rightarrow A^3 - 5A^2 + 8A - 4E = O$$

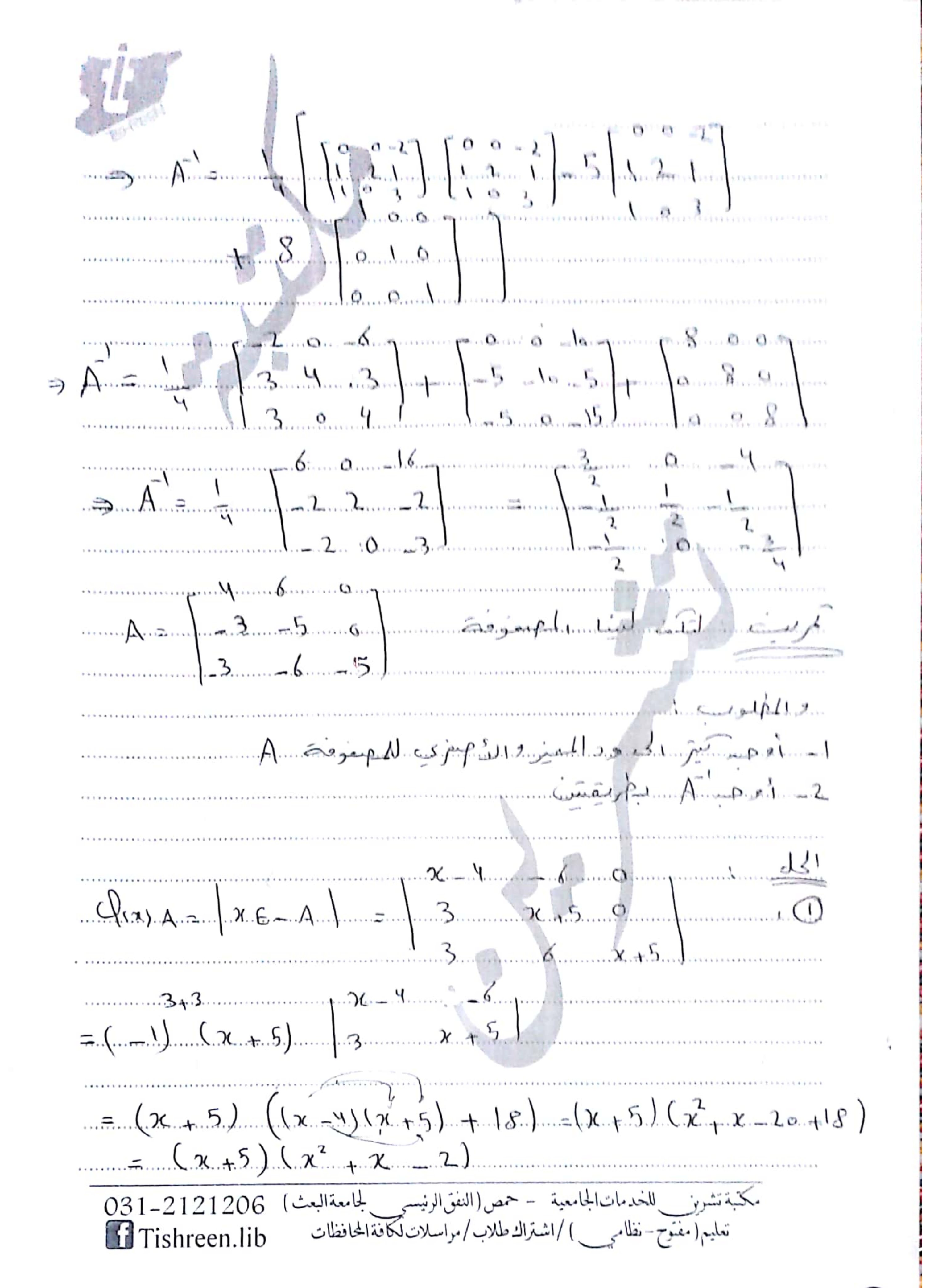
(3)

$$\Rightarrow A^3 - 5A^2 + 8A = 4E$$

نضرب الطرفين بـ A^{-1}

$$\Rightarrow A^2 - 5A + 8E = 4A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8E)$$



$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\left[\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}-2&0&-6\\3&4&3\\3&0&4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&10\\-5&-10&-5\\-5&0&-15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}6&0&-16\\-2&2&-2\\-2&0&-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}&0&-4\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

تمرين: لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&-5\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد كثير الحدود المميز والأصغري للمصفوفة A

2- أوجد A^{-1} بطريقتين

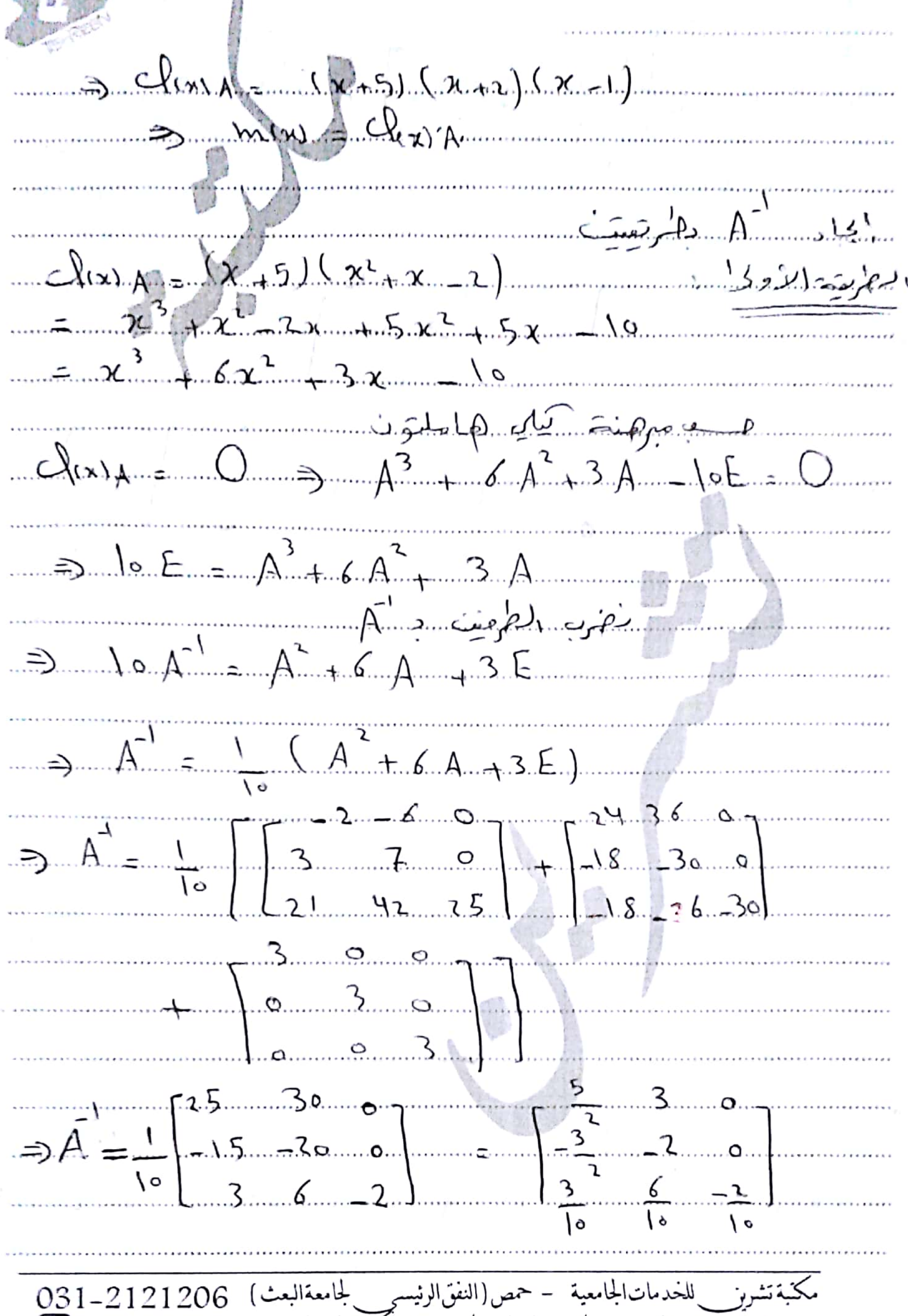
الحل:

(1) $\varphi(x)_A = |xE - A| = \begin{vmatrix}x-4&-6&0\\3&x+5&0\\3&6&x+5\end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+3}(x+5)\begin{vmatrix}x-4&-6\\3&x+5\end{vmatrix}$$

$$= (x+5)\big((x-4)(x+5)+18\big) = (x+5)(x^2+x-20+18)$$

$$= (x+5)(x^2+x-2)$$



$\Rightarrow ch(x)_A = (x+5)(x+2)(x-1)$

$\Rightarrow m(x) = ch(x)_A$

إيجاد A^{-1} بطريقتين

الطريقة الأولى:

$ch(x)_A = (x+5)(x^2+x-2)$

$= x^3 + x^2 - 2x + 5x^2 + 5x - 10$

$= x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

حسب مبرهنة كيلي هاملتون

$ch(x)_A = 0 \Rightarrow A^3 + 6A^2 + 3A - 10E = 0$

$\Rightarrow 10E = A^3 + 6A^2 + 3A$

نضرب الطرفين بـ A^{-1}

$\Rightarrow 10A^{-1} = A^2 + 6A + 3E$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 + 6A + 3E)$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\left[\begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 21 & 42 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 36 & 0 \\ -18 & -30 & 0 \\ -18 & -36 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 25 & 30 & 0 \\ -15 & -20 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} & \frac{-2}{10} \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية ((الطريقة التحويلات الأولية))

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_2]{\frac{1}{4} r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 + 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 - \frac{3}{2} r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & +5 & -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5} r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{2}{10} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ +\frac{3}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة الرابعة

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

إعداد: فاطمة البشير